Varianta 2

SUBIECTUL I

a) $AB = 3$.

b) $S_{ABC} = \frac{9}{2}$.

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

d) $EF^2 = DE^2 + DF^2 \Rightarrow$ triunghiul DEF este dreptunghic.

e) $tg^4 60^\circ = 9$.

f) $(2-i)^2 = 3-4i$.

SUBIECTUL II

1.

a) $S = 121$

b) $g(x) = -x+3$ și $g(2) = 1$.

c) $T_3 = 216a^2$.

d) $x \in \{2,5\}$.

e) $x = 1$.

2.

a) Prin calcul direct obținem $f(0) = 1$.

b) $f'(x) = 2 + e^x, \forall x \in \mathbf{R}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$.

d) $\int_0^1 (2x + e^x) dx = e$.

e) $\lim\limits_{x \to \infty} f(-x) = -\infty$.

SUBIECTUL III

a) Prin calcul direct: $f(0) = 1$.

b) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

c) Din punctul **b)**, folosind definiția funcției inverse rezultă $f^{-1} = f$.

d) Se obține prin calcul direct.

e) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Obținem $A^2=I_2$, atunci $A^3=A, A^4=I_2$, $A^5=A, A^6=I_2$

şi $A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=3A+3I_2=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$.

f) Pentru $k=1$, $f_2(x)=x$, adevărat din **b)** şi

$f_3(x)=f_2(f(x))=f(x)=1-x$, adevărat.

Presupunând adevărat că $f_{2k}(x)=x$ şi $f_{2k+1}(x)=1-x$ pentru $k\in\mathbf{N}^*$, arătăm că $f_{2k+2}(x)=x$ şi $f_{2k+3}(x)=1-x$.

Dar $f_{2k+2}(x)=f_{2k+1}(f(x))=1-f(x)=x$. Analog $f_{2k+3}(x)=1-x$.

Folosind metoda inducției matematice rezultă că relațiile sunt adevărate pentru $\forall k\in\mathbf{N}^*$.

g) $f_1(1)+f_2(1)+\ldots+f_{100}(1)=0+1+0+1+\ldots+0+1=50$.

SUBIECTUL IV

a) $f(2)-f(-2)=e^2-e^{-2}-e^{-2}+e^2=2e^2-2e^{-2}$.

b) $f'(x)=e^x+e^{-x}$.

c) $\int_0^1\left(\frac{e^{2x}+1}{e^x}\right)\cdot e^x dx=\left(\frac{e^{2x}}{2}+x\right)\Big|_0^1=\frac{e^2+1}{2}$.

d) $f'(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x}>0,\forall x\in\mathbf{R}$, deci f este crescătoare pe $\mathbf{R}$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{2e^x}=\frac{1}{2}$.

f) $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1\left(e^x-e^{-x}\right)dx=\left(e^x+e^{-x}\right)\Big|_{-1}^1=0$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(e-e^{-1}+e^2-e^{-2}+\ldots+e^n-e^{-n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(e+e^2+e^3+\ldots+e^n\right)-\left(e^{-1}+e^{-2}+e^{-3}+\ldots+e^{-n}\right)\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{e\cdot\left(e^n-1\right)}{e-1}-\frac{e^{-1}\left(e^{-n}-1\right)}{e^{-1}-1}\right)=\infty$.